PRODUTOS NOTÁVEIS

QUADRADO DA SOMA DE DOIS TERMOS

$$\underbrace{(x+y)^2}_{\text{Quadrado da soma de dois termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{Quadrado do 1º termo}} + \underbrace{2xy}_{\text{Duas vezes o produto do 1º pelo 2º}} + \underbrace{y^2}_{\text{Quadrado do 2º termo}}$$

O quadrado da soma de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

Exemplo 1:

a) $(x + 3y)^2 = x^2 + 2.x.(3y) + (3y)^2 = x^2 + 6xy + 9y^2$.

b) $(7x + 1)^2 =$

c) $(a^5 + 2bc)^2 =$

d) $\left(2m + \frac{3}{4}\right)^2 =$

QUADRADO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

$$\underbrace{(x-y)^2}_{\text{Quadrado da diferença de dois termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{Quadrado do 1º termo}} - \underbrace{2xy}_{\text{Duas vezes o produto do 1º pelo 2º}} + \underbrace{y^2}_{\text{Quadrado do 2º termo}}$$

O quadrado da diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo.

Exemplo 2:

1) $(7x - 4)^2 = (7x)^2 - 2.(7x).4 + 4^2 = 49x^2 - 56x + 16$.

2) $(6a - b)^2 =$

3) $(x^3 - xy)^2 =$

4) $\left(\frac{1}{5}p - 2h\right)^2 =$

PRODUTO DA SOMA PELA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

$$\underbrace{(x+y)}_{\text{Soma dos termos}} \;.\; \underbrace{(x-y)}_{\text{Diferença dos termos}} = \underbrace{x^2}_{\text{Quadrado do 1º termo}} - \underbrace{y^2}_{\text{Quadrado do 2º termo}}$$

O produto da soma pela diferença de dois termos é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Exemplo 3:

1) $(3a + x) \cdot (3a - x) = (3a)^2 - (x)^2 = 9a^2 - x^2$.

2) $(x^2 + 5p) \cdot (x^2 - 5p) =$

3) $(10 - ab^4) \cdot (10 + ab^4) =$

4) $\left(b^3 + \frac{3}{5}c\right) \cdot \left(b^3 - \frac{3}{5}c\right) =$

Exercícios.

1) Utilizando as regras dos produtos notáveis, calcule:

a) $(x + 3)^2$

b) $(a + b)^2$

c) $(5y - 1)^2$

d) $(x^2 - 6)^2$

e) $(2x + 7)^2$

f) $(9x + 1) \cdot (9x - 1)$

g) $(a^2 - xy)^2$

h) $\left(3x - \frac{1}{6}y\right)^2$

i) $(2x^2 + 3xy)^2$

j) $\left(\frac{1}{4}x^2y + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{4}x^2y - 1\right)$

k) $(x^3y - xy^3)^2$

l) $(3y - 5)^2$

m) $(5 + 8b)^2$

n) $(ab + a^2) \cdot (ab - a^2)$

o) $\left(b^3 - \frac{1}{2}a^2\right) \cdot \left(b^3 + \frac{1}{2}a^2\right)$

p) $(10x^2 - ab)^2$

q) $(2a^3 + 3a)^2$

r) $(a^4x^2 + a^2x^4) \cdot (a^4x^2 - a^2x^4)$

s) $\left(6x + \frac{1}{6}\right)^2$

t) $\left(3x^8 - \frac{y^2}{6}\right)^2$

u) $\left(2x^2 - \frac{3}{5}\right) . \left(2x^2 + \frac{3}{5}\right)$

v) $(2x^3 + 3y^2) . (2x^3 - 3y^2)$

CUBO DA SOMA DE DOIS TERMOS

$$\underbrace{(x + y)^3}_{\substack{\text{Cubo da}\\ \text{soma de}\\ \text{dois termos}}} = \underbrace{x^3}_{\substack{\text{Cubo do 1º}\\ \text{termo}}} + \underbrace{3x^2y}_{\substack{\text{Três vezes o}\\ \text{produto do}\\ \text{quadrado do}\\ \text{1º pelo 2º}}} + \underbrace{3xy^2}_{\substack{\text{Três vezes o}\\ \text{produto do 1º}\\ \text{pelo quadrado}\\ \text{do 2º}}} + \underbrace{y^3}_{\substack{\text{Cubo do 2º}\\ \text{termo}}}$$

O cubo da soma de dois termos é igual ao cubo do primeiro, mais três vezes o produto do quadrado do primeiro pelo segundo, mais três vezes o produto do primeiro pelo quadrado do segundo, mais o cubo do segundo.

Exemplo 4: Efetue:

a) $(a + b)^3 =$

b) $(x + 4)^3 =$

c) $(2a + y)^3 =$

CUBO DA DIFERENÇA DE DOIS TERMOS

$$\underbrace{(x + y)^3}_{\substack{\text{Cubo da}\\ \text{diferença de}\\ \text{dois termos}}} = \underbrace{x^3}_{\substack{\text{Cubo do 1º}\\ \text{termo}}} - \underbrace{3x^2y}_{\substack{\text{Três vezes o}\\ \text{produto do}\\ \text{quadrado do}\\ \text{1º pelo 2º}}} + \underbrace{3xy^2}_{\substack{\text{Três vezes o}\\ \text{produto do 1º}\\ \text{pelo quadrado}\\ \text{do 2º}}} - \underbrace{y^3}_{\substack{\text{Cubo do 2º}\\ \text{termo}}}$$

O cubo da diferença de dois termos é igual ao cubo do primeiro, menos três vezes o produto do quadrado do primeiro pelo segundo, mais três vezes o produto do primeiro pelo quadrado do segundo, menos o cubo do segundo.

Exemplo 5: Efetue:

a) $(a - b)^3 =$

b) $(x - 4)^3 =$

c) $(2a - y)^3 =$

FATORAÇÃO

Fatorar um número significa escrevê-lo como uma multiplicação de dois ou mais números.

Quando todos os termos de um polinômio têm um fator comum, podemos colocá-lo em evidência. A **forma fatorada** é o produto do fator comum pelo polinômio que se obtém dividindo-se cada termo do polinômio dado pelo fator comum.

Diferença de Quadrados

Considere o polinômio $x^2 – y^2$. Nos produtos notáveis, vimos que essa diferença de quadrados é o resultado de $(x + y).(x – y)$. Portanto,

$$x^2 – y^2 = (x + y).(x – y).$$

Por isso, toda diferença de dois quadrados pode ser fatorada como acima.

<u>Exemplo 6</u>: Fatore $x^2 – 25$. Como $25 = 5^2$, $x^2 – 25 = x^2 – 5^2 = (x + 5)(x – 5)$.

Trinômio Quadrado Perfeito

O polinômio $x^2 +2xy + y^2$ é um trinômio quadrado perfeito. É um trinômio porque tem três monômios; e é um quadrado perfeito porque ele é o quadrado de $(x + y)$, ou seja, é o resultado de $(x + y)^2$. Outro trinômio quadrado perfeito é $x^2 – 2xy + y^2$, que é o resultado de $(x – y)^2$. Assim, temos mais dois polinômios que sabemos fatorar:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 \qquad\qquad x^2 – 2xy + y^2 = (x – y)^2.$$

<u>Exemplo 7</u>: a) Fatore $x^2 + 12x + 36$. Neste caso x^2 e 36 são quadrados e suas bases são x e 6 e, além disso, $12x = 2.x.6$. Assim,

$$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2.$$

b) $9x^2 – 12x + 25$ é um quadrado perfeito? Ora, $9x^2 = (3x)^2$ e $25 = 5^2$. Mas, $2.(3x).5 = 30x$. Logo, $9x^2 – 12x + 25$ não é um trinômio quadrado perfeito.

c) Fatore $x^6 – 2x^3y + y^2$. Nesse caso, $x^6 = (x^3)^2$ e $y^2 = (y)^2$ e $2.x^3.y = 2x^3y$. Logo, $x^6 – 2x^3y + y^2 = (x^3 – y)^2$.

Exercícios:

2) Fatore as seguintes expressões:

a) $x^2 – 4$

b) $y^2 – 36$

c) $9x^2 – 16$

d) $81x^2 – 64$

e) $y^2 – 25x^2$

f) $4x^2 – 25a^2$

g) $x^2 + 8x + 16$

h) $x^2 – 8x + 16$

i) $4x^2 – 20x + 25$

j) $9x^2 – 12x + 4$

k) $x^2 – 2x + 1$

l) $121x^2 + 22x + 1$

m) $16y^2 – x^4$

n) $25m^2 + 20m + 4$

o) $25x^2 – \frac{10}{3}x + \frac{1}{9}$

3) Observe a fatoração seguinte:

$$a^4 – 1 = (a^2 + 1)(a^2 – 1) = (a^2 + 1)(a + 1)(a – 1)$$

Agora, decomponha num produto de três fatores.

a) $x^4 – 1$

b) $81a^4 – 1$

c) $x^{20} – 81$

d) $625 – x^4$

4) Efetue as divisões seguintes, fatorando o dividendo.

a) $\frac{x^2 - 14x + 49}{x - 7}$

b) $\frac{x^2 - 16}{x + 4}$

c) $\frac{25x^2 - 10x + 1}{(5x - 1)^2}$

d) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3}$

5) Simplifique e efetue $\frac{123456^2 - 12345^2}{123456 + 12345}$.

FATOR COMUM

Vamos efetuar essa multiplicação: $3x(y + 3z + 2)$.

$$3x(y + 3z + 2) = 3xy + 9xz + 6x.$$

Agora, queremos fatorar $3xy + 9xz + 6x$. Observe que em $3xy + 9xz + 6x$, o termo $3x$ está presente em todos os monômios, isto é,

$$3xy + 9xz + 6x = (3x)y + (3x).3z + (3x).2,$$

ou seja,

$$3xy + 9xz + 6x = 3x.(y + 3z + 2).$$

Ao fazer isso, dizemos que $3x$ foi colocado em evidência.

> Quando todos os termos de uma expressão algébrica têm um fator comum, podemos colocá-lo em evidência.

Exemplo 8: a) Fatore $6x^3 + 8x^2$. O fator comum é $2x^2$. Assim, colocando $2x^2$ em evidência, temos:

$$6x^3 + 8x^2 = 2x^2(3x + 4).$$

b) $14xy – 21xz$
c) $33xy^2 – 44x^2y + 22x^2y^2$
d) $4ax^2 + 6a^2x^2 + 4a^3x^2$

FATORANDO POR AGRUPAMENTO

Vamos fatorar $ax + ay + bx + by$. Neste caso, não temos um fator comum a todas as parcelas. No entanto, **a** é o fator comum às duas primeiras parcelas e **b** é o fator comum às duas últimas. Por isso, podemos separar a expressão em dois grupos e, colocar em evidência o fator comum de cada grupo:

$$ax + ay + bx + by = a(x + y) + b(x + y)$$

Agora, cada parcela do 2° membro tem o fator comum $(x + y)$. Colocando $(x + y)$ em evidência, obtemos:

$$ax + ay + bx + by =(x + y).(a + b)$$

> **Fatoração por Agrupamento**
> Para fatorar uma expressão algébrica por agrupamento
> - formamos grupos com os termos da expressão;
> - em cada grupo, colocamos os fatores comuns em evidência;
> - colocamos em evidência o fator comum a todos os grupos (se existir).

<u>Exemplo 9</u>: a) Vamos fatorar $x^2 - ay + xy - ax$.

$$x^2 - ay + xy - ax = x^2 + xy - ay - ax = x(x + y) - a(y + x) = (x + y)(x - a)$$

b) $y^3 - 5y^2 + y - 5$
c) $2x + ay + 2y + ax$
d) $y^3 - 3y^2 + 4y - 12$
e) $ax^2 - bx^2 + 3a - 3b$

Colocando o fator comum em evidência, fatore cada um dos seguintes polinômios:

a) $6x^2 + 6y^2$
b) $a^3 + 3a^2b$
c) $4x^2 - x^3$
d) $15ab + 10bc$
e) $y^2 - xy + 2y$
f) $x^9 + x^6 - x^4$
g) $35a^4m^3 + 14a^3m^4$
h) $2a^2 - 20a + 50$
i) $x^2y + y^3$
j) $\frac{a}{2} + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{2}$
l) $\frac{1}{8}ab + \frac{1}{4}a^2b - \frac{1}{2}ab^2$
m) $\frac{3}{4}x^2y + \frac{5}{4}xy^2$
n) $120ay^3 + 200ay^2 - 40ay$
o) $18mn + 30m^2n + 54mn^2$

Exercícios:

6) Fatore os seguintes polinômios:

a) $cy - y + cx - x$
b) $15 + 5x + 6a + 2ax$
c) $2x^2 - x + 4xy - 2y$
d) $am + m + a + 1$
e) $x^3 + xy^2 + ax^2 + ay^2$
f) $a^3x + a^3y - a^2x - a^2y$
g) $y^{12} - y^8 + y^4 - 1$
h) $a^3 + 10a^2 + 2a + 20$
i) $a^2b + b - 9a^2 - 9$
j) $6an + n + 12a + 2$
k) $3x - 3 + \frac{ax}{2} - \frac{a}{2}$
l) $\frac{2}{5}m + \frac{2}{5}mn + \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}pn$

7) Fatore $x^3 - ax^2 - 3bx + 3ab$.

$$x^3 - ax^2 - 3bx + 3ab = x^2(x - a) + 3b(a - x)$$

Observe que a expressão $(a - x)$ é a oposta de $(x - a)$, isto é, $a - x = -(x - a)$.
Então:

$$x^2(x - a) + 3b(a - x) = x^2(x - a) - 3b(x - a) = (x - a)(x^2 - 3b)$$

8) Fatore:

a) $ax + ay - bx - by$
b) $ax - 4a + 6x - 24$
c) $x^2 - bx - 2ax + 2ab$
d) $a^2y - a^3 + 3ab - 3by$

9) Simplifique as seguintes expressões:

a) $\dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^2 - 4}$
b) $\dfrac{5(x+2)^2 - 3y(x+2)^2}{x^2 + 4x + 4}$

10) Vamos ver outro caso de fatoração.
Primeiro observe:

$$(x + 2)(x + 5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$$

Então, para fatorar $x^2 + 7x + 10$ procuramos dois números de soma 7 e produto 10. Por tentativas, vemos que esses números são 2 e 5. Portanto,

$$x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$$

Agora, vamos fatorar:

a) $x^2 + 8x + 12$
b) $x^2 + 12x + 20$
c) $x^2 – 7x + 10$
d) $x^2 + 11x + 30$
e) $x^2 + 13x + 12$
f) $x^2 – x – 6$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO:

Exemplo 1: Resolver o seguinte sistema $\begin{cases} x + y = 81 \\ x - y = 35 \end{cases}$.

Resolução:

1° passo: Isolar uma incógnita.

Vamos isolar a incógnita x na primeira equação. (você pode escolher qualquer equação e isolar qualquer incógnita)

$$x + y = 81 \Rightarrow x = 81 – y$$

2° passo: Substituir a incógnita isolada.

Na segunda equação substituímos a incógnita x por 81 – y.

$$x – y = 35 \Rightarrow (81 – y) – y = 35$$

3° passo: Resolver a equação numa só incógnita.

Resolvemos a equação obtida:

$$(81 – y) – y = 35$$

$$81 – y – y = 35 \Rightarrow 81 – 2y = 35 \Rightarrow – 2y = 35 – 81 \Rightarrow y = \frac{-46}{-2} = 23$$

4 passo: Encontrar o valor da incógnita isolada no início.

Ao isolarmos x, vimos que x = 81 – y. Substituindo o valor de y = 3 em x = 81 – y, obtemos o valor de x:

$$x = 81 - y \Rightarrow x = 81 - 23 \Rightarrow x = 58$$

A única solução do sistema é S = {(58,23)}.

<u>Exemplo 2</u>: Resolver o sistema $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$.

Resolução:

Isolando uma incógnita: $y = \dfrac{2 - 5x}{3}$.

Substituindo a incógnita isolada em outra equação:

$$4x - 2y = 6 \Rightarrow 4x - 2.\ \frac{2 - 5x}{3} = 6 \Rightarrow 4x - \frac{4 - 10x}{3} = 6 \Rightarrow 12x - 4 + 10x = 18 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 22x = 22 \Rightarrow x = 1.$$

Calculando a incógnita isolada no início: $y = \dfrac{2 - 5x}{3} \Rightarrow y = \dfrac{2 - 5.1}{3} \Rightarrow y = -1$.

A única solução do sistema é S = {(1, –1)}.

MÉTODO DA ADIÇÃO

<u>Exemplo 3</u>: Resolver o seguinte sistema $\begin{cases} x + y = 81 \\ x - y = 35 \end{cases}$.

Resolução:

Observe que a primeira equação tem o termo +y e a segunda equação tem o termo simétrico –y. Esse fato permite-nos obter uma só equação sem a incógnita y, somando as duas equações membro a membro.

$$\begin{array}{r} x + y = 81 \\ \underline{x - y = 35} \\ 2x + 0 = 116 \end{array}$$

$$2x + 0 = 116 \Rightarrow x = 58.$$

Agora, é só substituir o valor de x numa das equações do sistema:

$$x + y = 81 \Rightarrow 58 + y = 81 \Rightarrow y = 81 - 58 \Rightarrow y = 23$$

A única solução do sistema é S = {(58,23)}

<u>Exemplo 4</u>: Resolver o sistema $\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases}$.

Neste caso, seria inútil somar imediatamente as equações. Como não há termos simétricos, nenhuma incógnita desaparece. Mas, podemos obter termos simétricos. Para isso, basta multiplicar ambos os membros da primeira equação por 2 e multiplicar ambos os membros da segunda equação por 3.

$$\begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x - 2y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x + 6y = 4 \\ 12x - 6y = 18 \end{cases}$$

Agora temos os termos simétricos +6y e –6y. Por isso, vamos somar as duas equações, membro a membro.

$$\begin{array}{r} 10x + 6y = 4 \\ \underline{12x - 6y = 18} \\ 22x + 0 = 22 \end{array}$$

$$22x + 0 = 22 \Rightarrow x = 1.$$

Agora, é só substituir o valor de x numa das equações do sistema:

$$5x + 3y = 2 \Rightarrow 5.1 + 3y = 2 \Rightarrow 3y = 2 - 5 \Rightarrow y = -3/3 \Rightarrow y = -1.$$

A única solução do sistema é S = {(1, –1)}

Exercícios.

1) Usando o método algébrico da substituição, determine a solução de cada um dos seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + y = 17 \\ x - y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 5y = 18 \\ x = 60 - y \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = 5 + 3x \\ 2x - 3y = -8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{x}{4} + y = \dfrac{1}{2} \\ x - \dfrac{y}{3} = 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + 2 = \dfrac{x - y}{10} \\ x = 2(y + 2) \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3(x + y) - 5(x - y) = 0 \\ \dfrac{3x}{2} = 5y + 2 \end{cases}$

2) Usando o método algébrico da adição, determine a solução de cada um dos seguintes sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x + y = 21 \\ x - y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x + 4y = 13 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 3x + 2y = 37 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5x + 7y = 12 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

e) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} = 2 \\ \dfrac{x}{6} - \dfrac{y}{4} = \dfrac{7}{4} \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2(x+1) - 3(y+2) = x \\ \dfrac{x}{4} - \dfrac{y-1}{2} = -2 \end{cases}$

EQUAÇÕES DO 2º GRAU

Uma equação do 2° grau na variável x é toda equação da forma: $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são os coeficientes da equação, representado por números reais, com $a \neq 0$. Considere a resolução das seguintes equações do 2° grau:

1) $\mathbf{x^2 - 7x = 0.}$

$x(x - 7) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 7$. $S = \{x \in \Re \mid x = 0 \text{ ou } x = 7\}$.

2) $\mathbf{x^2 - 25 = 0.}$

$x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$. $S = \{x \in \Re \mid x = 5 \text{ ou } x = -5\}$.

3) $\mathbf{x^2 - 10x + 25 = 0.}$

$(x - 5)^2 = 0 \Rightarrow x = 5$. $S = \{x \in \Re \mid x = 5\}$.

4) $\mathbf{x^2 - 6x + 5 = 0.}$

$x^2 - 6x + 5 + 4 = 0 + 4 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 4 \Rightarrow (x - 3)^2 = 4 \Rightarrow x - 3 = \pm 2 \Rightarrow x = 5$ ou $x = 1$

$S = \{x \in \Re \mid x = 5 \text{ ou } x = 1\}$.

5) $\mathbf{3x^2 - 30x + 27 = 0.}$

$x^2 - 10x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 10x + 9 + 16 = 16 \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 16 \Rightarrow (x - 5)^2 = 16 \Rightarrow$

$x - 5 = \pm 4 \Rightarrow x = 9$ ou $x = 1$. $S = \{x \in \Re \mid x = 9 \text{ ou } x = 1\}$.

Agora, considere a **equação geral do 2° grau na forma normal**

$ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Dividindo por a, tem-se:

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}$$

ou:

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

ou, ainda:

$$x^2 + \frac{b}{a}.x + \frac{c}{a} = 0\ .$$

O termo do meio, $\frac{b}{a}.x$, pode ser escrito como $2.x.\frac{b}{2a}$. Assim, a equação ficará:

$$x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \frac{c}{a} = 0$$

Para completar o quadrado, deve ser adicionado $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ em ambos os lados da equação. Assim, ela fica:

$$x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

ou, ainda, pode ser escrita como:

$$x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

ou,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

ou,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

ou,

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou,

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ou,

$$\mathbf{x =}\ \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$$

A fórmula de Bhaskara
Na equação do 2° grau, $ax^2 + bx + c = 0$, indica-se $b^2 - 4ac$ por Δ.
Quando $\Delta < 0$, a equação não tem soluções reais.
Quando $\Delta \geq 0$, as soluções são obtidas pela fórmula: $\mathbf{x} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2a}$.

Exercícios:

1) Resolva as seguintes equações incompletas do 2º grau:

a) $2x^2 - 1 = 0$

b) $x^2 + x = 0$

c) $10x^2 - 15x = 0$

d) $2x^2 - 50 = 0$

2) Resolva as seguintes equações do 2º grau, extraindo raiz quadrada:

a) $(x - 10)^2 = 36$

b) $(x + 5)^2 = 4$

c) $(\frac{x}{2} - 3)^2 = 49$

d) $(\frac{x}{3} + 5)^2 = 16$

e) $(x - 3)^2 = -16$

f) $x^2 - 8x + 16 = 4$

g) $x^2 + 2x + 1 = 81$

3) Resolva as seguintes equações, usando a mesma metodologia do exercício 2, transformando uma parte delas em um trinômio quadrado perfeito.

a) $x^2 - 2x - 15 = 0$

b) $x^2 - 7x + 12 = 0$

c) $x^2 + 12x + 27 = 0$

d) $x^2 - 6x = 40$

e) $3x^2 - 27x + 60 = 0$

f) $7x^2 - 14x - 105 = 0$

g) $9x^2 + 45x + 54 = 0$

h) $4x^2 - 36x + 65 = 0$

i) $100x^2 - 100x + 25 = 0$

4) Resolva equações do 2° grau, usando fórmula de Bhaskara:

a) $5x^2 + 9x + 4 = 0$

b) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

c) $4x^2 - 6x + 2 = 0$

d) $(x + 4)(x - 1) + x^2 = 5(x - 1)$

e) $(3x - 1)^2 + (2x - 5)^2 = 6(2x^2 + 3)$

f) $(x - 3)(x + 4) - 10 = (1 - x)(x + 2)$

5) O número real x somado com o dobro de seu inverso é igual a 3. Escreva na forma normal a equação do 2° grau que se pode formar com os dados desse problema.

6)O número de diagonais de um polígono pode ser obtido pela fórmula $d = \frac{n(n-3)}{2}$. Se $d = 5$, escreva, na forma normal, a equação do 2° grau na incógnita n que se pode obter.

7)Dividindo o número 105 por um certo número positivo y, o quociente obtido é exato e supera o número y em 8 unidades. Escreva a equação na forma normal que se pode formar com os dados desse problema.

8)Em um retângulo de área 9 m^2, a medida do comprimento é expressa por (x + 2)m enquanto a medida da largura é expressa por (x – 6)m. Nessas condições, escreva na forma normal a equação do 2° grau que se pode formar com esses dados.

9) Um quadrado cuja medida do lado é expressa por (2x – 1)cm tem a mesma área de um retângulo cujos lados medem (x + 2)cm e (x + 3)cm. Nessas condições, escreva, na forma normal, a equação do 2° grau que se pode obter com esses dados.

FATORAÇÃO DO TRINÔMIO DO 2º GRAU

Alguns tipos de expressões algébricas tais como diferença de quadrados da forma $x^2 - 49$ ou trinômio quadrado perfeito, $x^2 + 10x + 25$ podem ser decompostos como $(x - 7)(x + 7)$ ou $(x + 5)^2$. Agora, veremos como as expressões do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, que são chamadas de **trinômios do 2º grau** são fatoradas. Para isso, consideremos o seguinte exemplo.

Exemplo 1: Consideremos a multiplicação de (x – 3) por (x – 5).

$(x - 3)(x - 5) = x^2 - 3x - 5x + 15 = x^2 - 8x + 15.$

O lado esquerdo da igualdade pode ser visto como forma fatorada e o lado direito a forma não-fatorada. Assim, $(x - 3)(x - 5)$ e $x^2 - 8x + 15$ são expressões iguais. Na expressão $(x - 3)(x - 5)$, é fácil ver o que acontece quando substituímos x = 3 ou x = 5: obtém-se o resultado zero. Por isso dizemos que 3 e 5 são os anuladores de $(x - 3)(x - 5)$. Logo, 3 e 5 são também anuladores de $x^2 - 8x + 15$. Ou seja, para esses valores de x, deve-se ter $x^2 - 8x + 15 = 0$. Então, os números 3 e 5 podem ser encontrados com a fórmula de Bhaskara:

$$\Delta = (-8)^2 - 4.1.15 = 64 - 60 = 4;\ x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{8 \pm 2}{2}, \text{ isto é, } x = 3 \text{ ou } x = 5.$$

Observe então a fatoração de $x^2 - 8x + 15$:

$x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5).$

Logo, generalizando, tem-se:

> Todo trinômio do 2º grau $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$, com $\Delta \geq 0$, pode ser fatorado assim:
> $$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$
> em que x_1 e x_2 são as soluções de $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$.

OBS.: O trinômio de 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$, com $\Delta \leq 0$, não pode ser fatorado.

Exemplo 2: Fatore o trinômio do 2º grau $x^2 - 6x + 8$.

Solução: Inicialmente determinam-se os anuladores de $x^2 - 6x + 8$. Usando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$\Delta = (-6)^2 - 4.1.8 = 36 - 32 = 4;\ x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}, \text{ isto é, } x = 4 \text{ ou } x = 2.$$

Então, $x^2 - 6x + 8 = a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x - 4)(x - 2) = (x - 4)(x - 2)$.

Você pode conferir, efetuando $(x - 4)(x - 2)$ e verificando se obtém $x^2 - 6x + 8$.

Exemplo 3: Fatore o trinômio do 2º grau $3x^2 - 6x + 3$.

Solução: Inicialmente determinam-se os anuladores de $3x^2 - 6x + 3$. Usando a fórmula de Bhaskara, temos:

$$\Delta = (-6)^2 - 4.3.3 = 36 - 36 = 0;\ x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2.3} = \frac{6 \pm 0}{6}, \text{ isto é, } x_1 = x_2 = 1.$$

Então, $x^2 - 6x + 8 = a(x - x_1)(x - x_2) = 3(x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$.

Você pode conferir, efetuando $3(x - 1)^2$ e verificando se obtém $3x^2 - 6x + 3$.

Exercícios.

1) Fatore, quando for possível:

a) $x^2 + 10x + 21$
b) $x^2 - 3x - 10$
c) $2x^2 + 5x - 3$
d) $4x^2 + 7x + 3$
e) $-x^2 - x + 6$
f) $5x^2 - 15x + 10$
g) $-x^2 - 4x - 4$
h) $-4x^2 + 16x - 15$
i) $2x^2 - 1$
j) $x^2 + x + 1$
k) $3x^2 + 7x + 5$
l) $x^2 - 8x$

2) Simplifique a expressão:

a) $\dfrac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$

b) $\dfrac{x-4}{x^2-5x+4}$

c) $\dfrac{x^2-7x}{x^2+3x-70}$

d) $\dfrac{x^2-3x-4}{3x+3}$

e) $\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

f) $\dfrac{-x^2+6x-9}{x^2+x-12}$

3) Qual é o valor da expressão $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-2x-8}$ para x = 98?

EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS

Equação fracionária é toda equação que tem pelo menos uma variável no denominador de uma fração algébrica.

Por exemplo, $\dfrac{2x-1}{4}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{3x-1}{6}$ é uma equação fracionária.

Exercícios.

1) Resolva a equação:

a) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}=2$

b) $\dfrac{3x}{x-3}$ = x – 2

c) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{1}{4}$

d) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{x-2}$

e) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{2}{3}$

f) $\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x+6}{x}=2$

g) $\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x+6}{x}=2$

h) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{-3x^2}{x^2-1}$

i) $\dfrac{4}{x(x-2)}+\dfrac{2}{x}=1$

j) $1+\dfrac{2}{x-4}=\dfrac{8}{x(x-4)}$

k) $1+\dfrac{15}{x-3}=\dfrac{3x-24}{(x-2)(x-3)}$

l) $\dfrac{4}{2x+1}-\dfrac{3}{(x+2)(2x+1)}=1$

m) $\dfrac{x+1}{x^2-5x+6}+\dfrac{2}{x-3}=2$

n) $\dfrac{3x}{x^2-7x+12}+\dfrac{1}{x-3}=2$

FUNÇÕES TRANSCENDENTAIS

1 – Função Exponencial

Suponha que atualmente a dívida de um certo município seja de 1 milhão de dólares e que, a partir de hoje, a cada década, a dívida dobre em relação ao valor devido na década anterior. Dessa forma, podemos construir a tabela a seguir, na qual o tempo zero indica o momento atual:

Tempo (em décadas)	Dívida (em milhões de dólares)
0	1
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32
⋮	⋮

Note que, na segunda coluna, os valores são potencias de 2, ou seja, 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, ... Assim, para cada tempo *x*, em décadas, a dívida *y*, em milhões de dólares, pode ser expressa pela função: $y = 2^x$.

Nesta seção vamos estudar funções como a desse exemplo, isto é, funções do tipo $y = a^x$, em que *a* é uma constante real positiva e diferente de 1. Observe que nessa função a variável é o expoente, e por isso é chamada de **função exponencial**.

> **Função exponencial** é toda função f: $\Re \to \Re^*_+$, tal que $f(x) = a^x$, com $a \in \Re^*_+$ e $a \neq 1$.

Se x = n, um inteiro positivo, então $a^n = \underbrace{a.\ a.\ a....\ a}_{\text{n fatores}}$.

Se x = 0, então $a^0 = 1$, e se x = –n, onde n é um inteiro positivo, então $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$.

Se x for um número racional, x = p/q, onde p e q são inteiros e q > 0, então

$$a^x = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p.$$

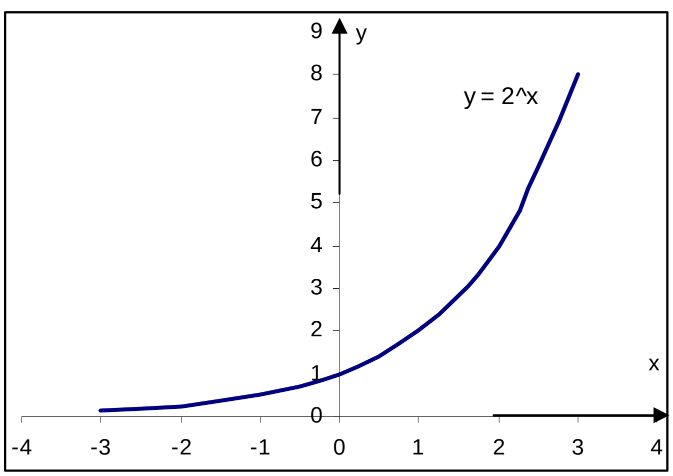
Mas, qual o significado de a^x, se x for um número irracional? Qual o significado de $2^{\sqrt{3}}$ ou $5^{\pi+}$? Para responder a essas questões considere o gráfico da função $y = 2^x$.

Exemplo 1: $f(x) = 2^x$ é uma função exponencial.

Por meio de uma tabela, podemos obter alguns pontos da função e, a partir deles, esboçar o gráfico:

x	$y = 2^x$
-3	1/8
-2	¼
-1	½
0	1
1	2
2	4
3	8

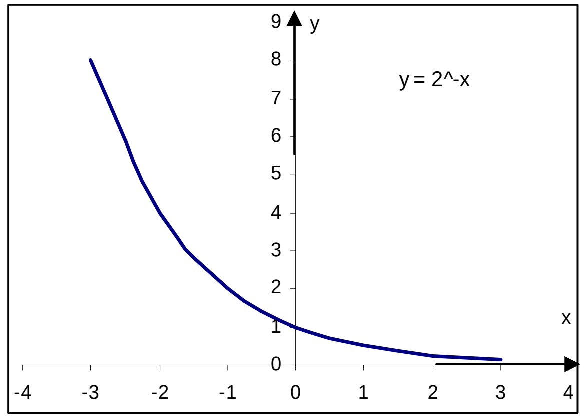
Dom(f) = $\Re$
Im(f) = $\Re^*_+$
f é crescente em todo seu domínio.



Exemplo 2: $f(x) = 2^{-x} = (1/2)^x$ é uma função exponencial.

Por meio de uma tabela, podemos obter alguns pontos da função e, a partir deles, esboçar o gráfico:

x	$y = (1/2)^{-x}$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	½
2	¼
3	1/8



Dom(f) = $\Re$
Im(f) = $\Re^*_+$
f é decrescente em todo seu domínio.

Leis dos Expoentes. Se a e b forem números positivos e x e y números reais quaisquer, então

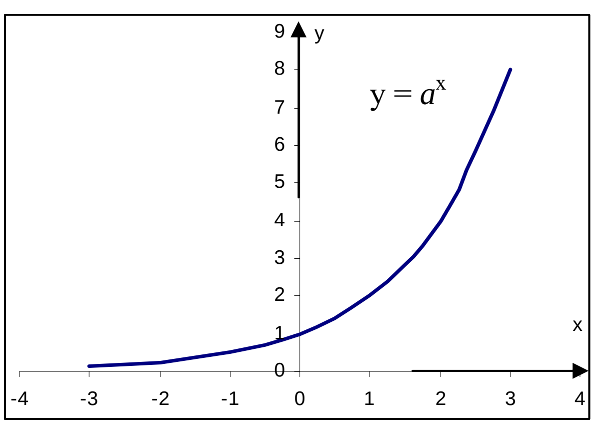
1. $a^{x+y} = a^x a^y$ **2.** $a^{x-y} = \dfrac{a^x}{a^y}$

3. $(a^x)^y = a^{xy}$ **4.** $(ab)^x = a^x b^x$

Propriedades.

E.1 Sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, tem-se: $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

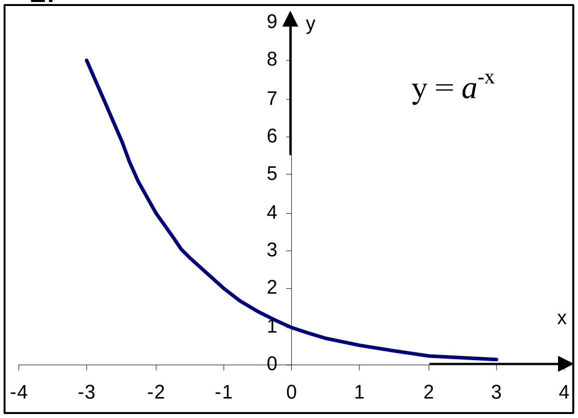
E.2 A função exponencial f(x) = a^x é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $a > 1$.



Tem-se, então:

$$a^m > a^n \Leftrightarrow m > n,\ \forall a, \text{ com } a \in \Re \text{ e } a > 1.$$

E.3 A função exponencial f(x) = a^x é decrescente em todo seu domínio se, e somente se, 0 < *a* < 1.



Tem-se, então:

$$a^m > a^n \Leftrightarrow m < n,\ \forall a, \text{ com } a \in \Re \text{ e } 0 < a < 1.$$

<u>Exemplo 3</u>**.** Esboce o gráfico da função y = 3 – 2^x e determine seu domínio e a sua imagem.

<u>Exemplo 4</u>. Dadas as funções f(x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+7}$ e g(x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^{5x+1}$, determine x real de modo que:

a) f(x) = g(x) b) f(x) < g(x) c) f(x) > g(x) d) f(x) = $\left(\frac{1}{3}\right)^{11}$

2 – Função Logarítmica

Se *a* > 0 e *a* ≠ 1, a função exponencial f(x) = a^x é crescente ou decrescente, ela é invertível, pelo Teste da Reta Horizontal. Assim, a função inversa f^{-1}, chamada de **função logarítmica com base *a*** denotada por $\log_a$. Usando a formulação de função inversa

$$F^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x,$$

teremos

$$\boxed{\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x}$$

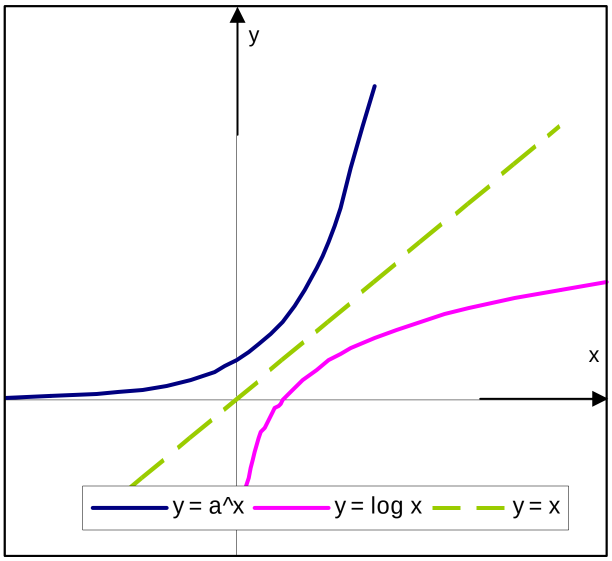
Assim, se x > 0, então $\log_a x$ é o expoente ao qual deve se elevar a base *a* para se obter x. Temos, então $\log_a a = 1$ e $\log_a 1 = 0$.

Por exemplo, $\log_{10} 0{,}001 = -3$ porque $10^{-3} = 0{,}001$.

As equações de cancelamento vistos em funções inversas, quando aplicadas a $f(x) = a^x$ e $f^{-1}(x) = \log_a x$, ficam assim:

$$\log_a (a^x) = x \text{ para todo } x \in \Re$$
$$a^{\log_a x} = x \text{ para todo } x > 0$$

A função logarítmica $\log_a$ tem o domínio $(0,\infty)$ e a imagem $\Re$. Seu gráfico é a reflexão do gráfico de $y = a^x$ em torno da reta $y = x$. O gráfico abaixo mostra o caso em que $a > 1$.



As seguintes propriedades das funções logarítmicas resultam das propriedades correspondentes das funções exponenciais.

Leis dos Logaritmos. Se x e y forem números positivos, então

1. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

2. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

3. $\log_a (x^r) = r\log_a x$

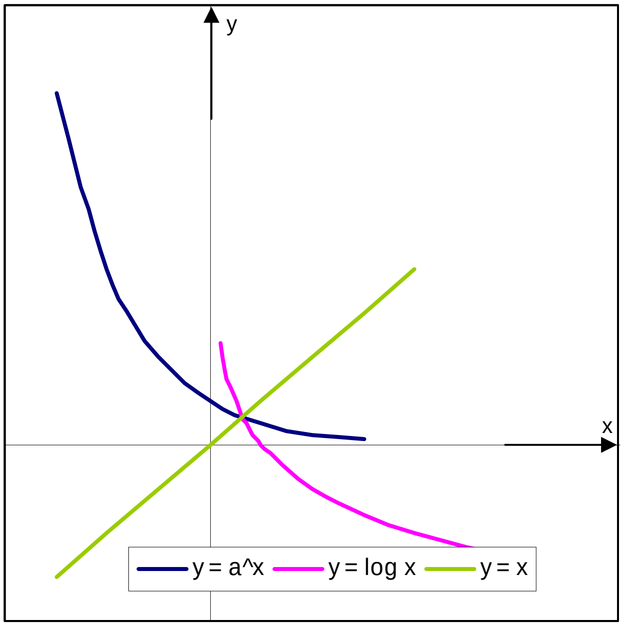
Exemplo 5.
Use a lei dos logaritmos para calcular $\log_2 80 - \log_2 5$.
Usando a lei 2, $\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 80/5 = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$.

Propriedades.
G.1 $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$ para $\forall\ x > 0,\ y > 0,\ a > 0$ e $a \neq 1$.

G.2 A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $a > 1$. (figura acima)

Tem-se, então: $\log_a x_2 > \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$, para $\forall\ x_1 > 0,\ x_2 > 0,\ a > 0$ e $a \neq 1$.

G.3 A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é decrescente em todo seu domínio se, e somente se, $0 < a < 1$. (figura abaixo).



Tem-se, então: $\log_a x_2 < \log_a x_1 \Leftrightarrow x_2 > x_1$, para $\forall\ x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Logaritmos Naturais

De todas as possíveis bases *a* para os logaritmos, a escolha mais conveniente para uma base é *e*. Os logaritmos na base *e* são chamados de **logaritmos naturais** e têm uma notação especial:

$$\boxed{\log_e x = \ln x}$$

Fazendo $a = e$, e substituindo $\log_e$ por ln nas propriedades já descritas para logaritmos, as propriedades que definem a função logaritmo natural ficam

$$\boxed{\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \ln e^x = x, & x \in \Re \\ e^{\ln x} = x, & x > 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\ln e = 1}$$

Exemplo 6. Expresse $\ln a + \frac{1}{2} \ln b$ como um único logaritmo.

Exemplo 7. Determine o domínio de cada uma das funções:

a) $f(x) = \log \quad (3x + 12)$ b) $g(x) = \log_x (x^2 - 1)$

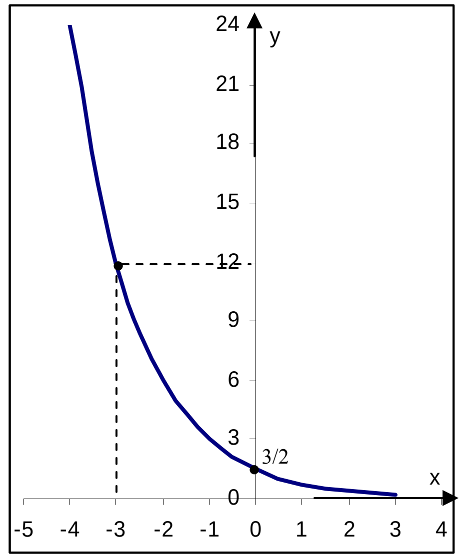
Exemplo 8. Esboce o gráfico da função $y = \ln(x - 2) - 1$.

Exercícios.

1) Na figura ao lado está representado o gráfico de $f(x) = k\ a^m$, sendo k e a constantes reais positivas, com $a \neq 1$. O valor de f(2) é:

a) 3/8 b) ½

c) ¾ d) 1



2) Em pesquisa realizada, constatou-se que a população (P) de determinada bactéria cresce segundo a expressão $P(t) = 25.2^t$, em que t representa o tempo em horas. Para atingir uma população de 400 bactérias, será necessário um tempo de:

a) 4 horas b) 3 horas c) 2 horas e 30 min. d) 2 horas e) 1 hora

3) O anúncio de certo produto aparece diariamente num certo horário na televisão. Após t dias do início da apresentação desse anúncio, o número y de pessoas que ficam conhecendo o produto é dado por $y = 3 - 3(0,8)^t$, em que y representa o número de pessoas, em milhões. Para que valores de t temos exatamente 1,08 milhão de pessoas conhecendo o produto?

4) Os gráficos de $f(x) = a^x$, com $a \in \Re^*_+$ e $a \neq 1$, e $g(x) = x^2 - 1$ se interceptam em um ponto de abscissa 3. O valor de a é:

a) 2 b) 3 c) 4 d) 8 e) 9

5) Faça num mesmo sistema de coordenada os gráficos das funções: $y = 2^x$, $y = e^x$, $y = 5^x$, $y = 20^x$. Como estão relacionados esses gráficos?

6) Expresse a quantidade dada como um único logaritmo.

a) $\log_2 64$ b) $\log_6 \dfrac{1}{36}$ c) $\log_8 2$ d) $\ln e^{\sqrt{2}}$

e) $\log_{10} 1,25 + \log_{10} 80$ f) $\log_5 10 + \log_5 20 - 3\log_5 2$

7) Expresse a quantidade dada como um único logaritmo.

a) $2 \ln 4 - \ln 2$ b) $\ln x + a \ln y - b \ln z$

8) Encontre o domínio e a imagem da função $g(x) = \ln(4 - x^2)$.

9) Classifique como crescente ou decrescente cada uma das funções:

a) $f(x) = \log_5 x$ b) $g(x) = \log_{0,3} x$

10) Julgue verdadeira ou falsa cada uma das seguintes afirmações, onde $a > 0$ e $b > 0$.

( ) a) $\log_3 x = \log_3 5 \Leftrightarrow x = 5$.

( ) b) $\log_3 a > \log_3 b \Leftrightarrow a > b$.

( ) c) $\log_{\frac{1}{3}} a > \log_{\frac{1}{3}} a \Leftrightarrow a > b$.

( ) d) $\log_{0,7} a > \log_{0,7} a \Leftrightarrow a > b$.

( ) e) $\log_{\sqrt{1,5}} a \geq \log_{\sqrt{1,5}} a \Leftrightarrow a \geq b$.

11) Determine o domínio das seguintes funções:

a) $f(x) = \log_8 (5x - 15)$ b) $g(x) = \log_5 (x^2 - 3x)$ c) $h(x) = \log_x (6x - 1)$

d) $f(x) = \log_{(x-3)} 10$ e) $g(x) = \log_{(x-3)} (5x - 12)$ f) $h(x) = \log_{(x-1)} (16 - x^2)$

12) Determine os valores reais de a tais que:

a) $y = \log_{(a-3)} x$ é crescente.

b) $y = \log_{(2-a)} x$ é crescente.

c) $y = \log_{(1-a^2)} x$ é crescente.

13) Dada a função $f(x) = 2^{x+1}$, determine:

a) $f(9)$ b) $f(-1)$ c) o valor de x para que se tenha $f(x) = 128$.

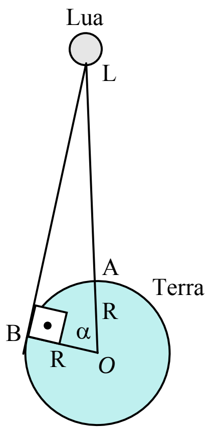
14) Determine o valor de k de modo que o ponto (8,k) pertença ao gráfico da função $f(x) = 1 + \log_2 x$.

3 – Funções Trigonométricas

3.1 – A Origem da Trigonometria

As dimensões do Universo sempre fascinaram os cientistas. O astrônomo grego Aristarco de Samos (310 a.C. – 230 a.C.) foi um dos primeiros a calcular as distâncias que separam a Terra, a Lua e o Sol; para isso ele usou relações entre as medidas dos lados e as medidas dos ângulos internos de triângulos retângulos. Para exemplificar, mostraremos uma maneira de calcular a distância entre a Terra e a Lua e a medida do raio desse satélite.

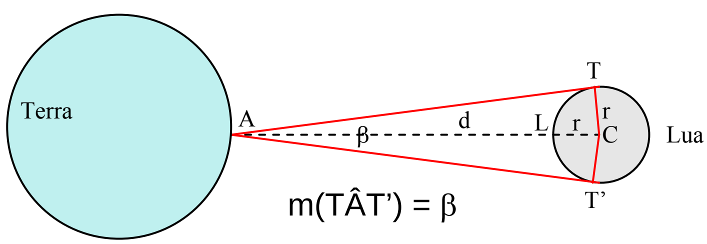
Suponhamos que em um observatório astronômico A, a Lua é vista no zênite, isto é, na vertical; no observatório B, a Lua é vista na linha do horizonte, conforme a figura.



Conhecendo-se a medida R do raio da Terra e a medida α do ângulo central AÔB, que é igual à medida do arco AB, pode-se obter a distância AL da seguinte maneira:

$$\cos\alpha = \frac{R}{AL + R} \Rightarrow AL = \frac{R}{\cos\alpha} - R$$

Para o cálculo da medida r do raio da Lua, inicialmente, mede-se o ângulo formado pelas duas retas tangentes AT e AT' a um círculo máximo do satélite, conforme a figura a seguir:



$m(T\hat{A}T') = \beta$

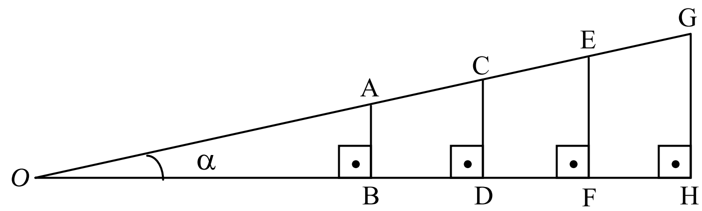
Conhecendo-se a distância d entre os pontos A e L, obtém-se:

$$\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{d + r} \Rightarrow r = \frac{c.\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{sen}\frac{\beta}{2}}$$

A parte da matemática que estuda essas relações recebe o nome de Trigonometria, do grego *trigono* (triângulo) e *metria* (medida), e surgiu da necessidade de medir distâncias inacessíveis.

3.2 – Seno, Co-seno e Tangente de um Ângulo Agudo

Sejam todos os triângulos retângulos com um ângulo interno agudo de medida α. As razões entre lados correspondentes são iguais:



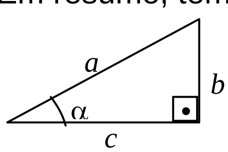
$$\frac{BA}{OA} = \frac{DC}{OC} = \frac{FE}{OE} = \frac{HG}{OG} = r_1;$$

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC} = \frac{OF}{OE} = \frac{OH}{OG} = r_2;$$

$$\frac{BA}{OB} = \frac{DC}{OD} = \frac{FE}{OF} = \frac{HG}{OH} = r_3.$$

As razões (trigonométricas) r_1, r_2 e r_3, são chamadas, respectivamente de: **seno** do ângulo α (sen α), **co-seno** do ângulo α (cos α) e **tangente** do ângulo α (tg α).

Em resumo, temos:

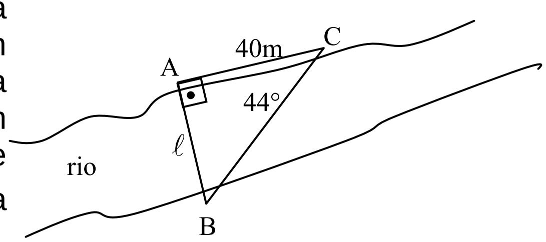


$$\boxed{\textbf{sen}\ \alpha = \frac{\textit{Cateto oposto}}{\textit{Hipotenusa}} = \frac{b}{a}}$$

$$\boxed{\textbf{cos}\ \alpha = \frac{\textit{Cateto adjacente}}{\textit{Hipotenusa}} = \frac{c}{a}}$$

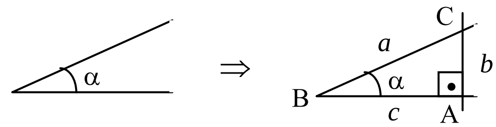
$$\boxed{\textbf{tg}\ \alpha = \frac{\textit{Cateto oposto}}{\textit{Cateto adjacente}} = \frac{b}{c}}$$

<u>Exemplo 1</u>: Um engenheiro deve medir a largura de um rio. Para isso, fixa um ponto A na margem em que está e um ponto B na margem oposta (conforme figura). A seguir desloca-se 40m perpendicularmente à reta AB até o ponto C e mede o ângulo $A\hat{C}B$, obtendo 44°. Calcule a largura do rio.
Dados: sen44° = 0,69; cos44° = 0,71; tg44° = 0,96.



3.3 – Relação entre o seno, o cosseno e a tangente de um ângulo agudo

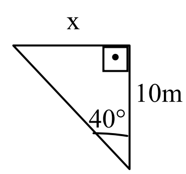
Construindo um ângulo agudo de medida α e traçando uma perpendicular a um dos lados do ângulo (conforme figura), temos:



Calculando senα e cosα, e efetuando $\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \dfrac{b}{c} = tg\alpha$.

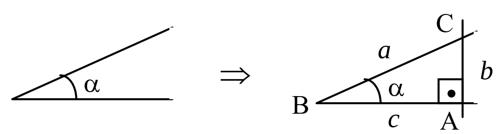
Dado um ângulo agudo de medida α, tem-se: $tg\alpha = \dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

<u>Exemplo 2</u>: Dados sen 40° = 0,64 e cos 40° = 0,76, determinar o valor de x na figura:



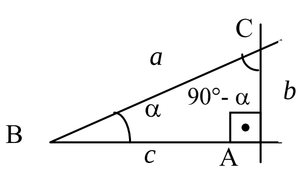
3.4 – Ângulos Complementares

Construindo um ângulo agudo de medida α e traçando uma perpendicular a um dos lados do ângulo, temos:



Observe que o ângulo $\hat{C}$ é o complementar de $\hat{B}$, pois α + med($\hat{C}$) = 90° $\Rightarrow$ med($\hat{C}$) = 90° – α.

Assim, temos:



$$\left.\begin{array}{l} \text{sen}\alpha = \dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} \\[2ex] \cos(90° - \alpha) = \dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\text{sen}\alpha = \cos(90° - \alpha)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}} \\[2ex] \text{sen}(90° - \alpha) = \dfrac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \text{sen}(90° - \alpha)}$$

Se α é a medida de um ângulo agudo, então: sen α = cos (90°– α) e cos α = sen (90°– α).

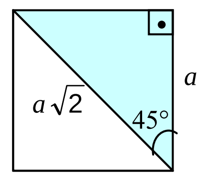
Exemplo 3: Sabendo que cos 23° = 0,92, calcular o valor da expressão: E = $\dfrac{\text{sen}23° + \cos 67°}{4.\text{tg}23°}$.

3.5 – Ângulos Notáveis

Em termos práticos, convém conhecermos o seno, o co-seno e a tangente de alguns ângulos. Escolhemos pela facilidade das demonstrações, os ângulos de 30°, 45° e 60°, que chamaremos de **ângulos notáveis**.

Ângulo de 45°

A medida de cada diagonal de um quadrado de lado *a* é $a\sqrt{2}$, e cada ângulo interno do quadrado é dividido por uma diagonal em dois angulos de 45°. Assim, temos:



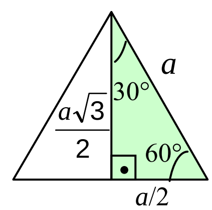
$$\text{sen } 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45° = \frac{a}{a} = 1.$$

Ângulos de 30° e 60°

A medida de cada altura de um triângulo eqüilátero de lado *a* é $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Cada altura desse tipo de triângulo também é bissetriz interna e mediana. Como cada ângulo interno do triângulo eqüilátero mede 60°, temos:



$$\text{sen } 30° = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg } 30° = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{sen } 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

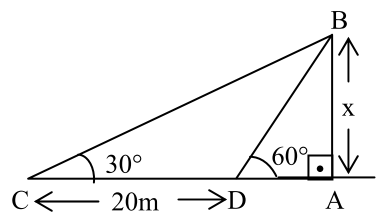
$$\cos 60° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg } 60° = \frac{\text{sen}60°}{\cos 60°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Tabela dos ângulos notáveis

	30°	45°	60°
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

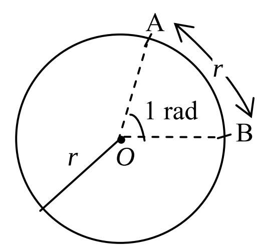
<u>Exemplo 4</u>: Determinar o valor de x na figura:



3.6 – O Radiano, Unidade de Medida de Arco e de Ângulo

Neste capítulo, estudaremos uma outra unidade para medir ângulo e arco: o **radiano**, definido a seguir:

consideremos um arco $\overset{\frown}{AB}$, contido numa circunferência de raio *r*, tal que o comprimento do arco $\overset{\frown}{AB}$ seja igual a *r*. Dizemos que a medida do arco $\overset{\frown}{AB}$ é 1 radiano (1 rad).



Definição

Um radiano (1 rad) é um arco cujo comprimento é igual ao do raio da circunferência que o contém.

A medida da circunferência em radianos

Sabemos que uma circunferência mede 360°. Qual será a sua medida em radianos?

Consideremos uma circunferência cujo raio tenha medida *r*. Como o comprimento dessa circunferência é $2\pi r$, podemos obter a sua medida x, em radianos, por meio de uma regra de três:

Medida em rad	*Comprimento*
1	r
x	$2\pi r$

Logo: x = $\frac{2\pi r}{r}$ rad = 2π rad. Assim, concluímos que:

A medida de uma circunferência é 2π rad.

Transformações de unidades

Dizemos que uma medida em radianos é equivalente a uma medida em graus se são medidas de um mesmo arco; por exemplo, 2π rad é equivalente a 360°, pois ambas são medidas de um arco de uma volta completa. Conseqüentemente, temos:

π rad é equivalente a 180°

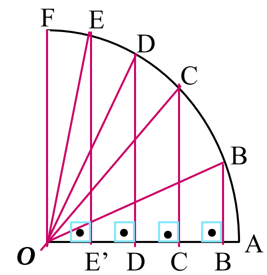
Essa equivalência nos permite transformar unidades, ou seja, dada a medida de um arco em graus, podemos obter a medida desse arco em radianos e vice-versa.

3.7 – Circunferência Trigonométrica

As razões trigonométricas seno, co-seno e tangente de um ângulo agudo em um triângulo retângulo não dependem do tamanho do triângulo, mas, sim, da medida do ângulo. Desse modo, para construir uma tabela com essas razões para vários ângulos, podemos considerar triângulos retângulos que tenham hipotenusas de mesma medida e fazer variar os ângulos agudos. Assim, teremos tantos triângulos retângulos quanto quisermos. Na figura seguinte estão representados alguns desses triângulos.

Note que:

- Os vértices B, C, D e E pertencem a uma mesma circunferência, pois as hipotenusas dos triângulos OBB', OCC', ODD' e OEE' têm todas a mesma medida.
- Se adotarmos a medida da hipotenusa como unidade, o seno, o co-seno de um ângulo agudo de vértice *O* serão, respectivamente, a medida do cateto oposto e a medida do cateto adjacente a esse ângulo.



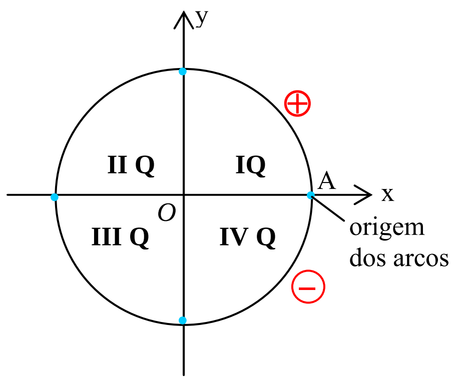
Essas idéias levaram os matemáticos a definir as razões trigonométricas em uma circunferência, chamada circunferência trigonométrica (construída a seguir), na qual os conceitos de seno, co-seno e tangente são estendidos também para ângulos não-agudos.

Construção

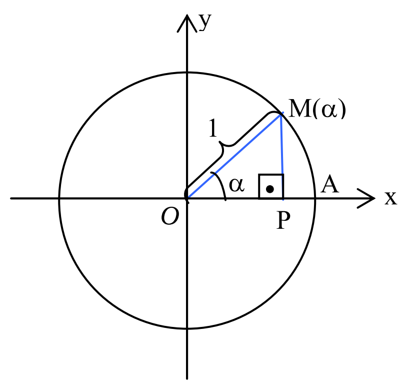
Consideremos uma circunferência de raio unitário (r = 1), cujo centro coincida com a origem de um sistema cartesiano ortogonal.

Essa estrutura, com as convenções a seguir, constitui a circunferência trigonométrica.

- O ponto A(1,0) é a origem de todos os arcos a serem medidos na circunferência.
- Se um arco for medido no sentido horário, então a essa medida será atribuído o sinal negativo (–).
- Se um arco for medido no sentido anti-horário, então a essa medida será atribuído o sinal positivo (+).
- Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quatro regiões, chamadas de quadrantes (Q); esses quadrantes são numeradas no sentido anti-horário, a partir do ponto A.



3.8 – Seno de um Arco Trigonométrico



Consideremos na circunferência trigonométrica um arco $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com $0° < \alpha < 90°$. No triângulo retângulo OMP, temos:

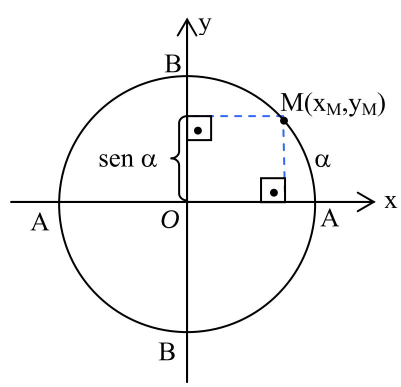
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{MP}{1} = MP$$

Note que a medida MP é a ordenada do ponto M.

Veremos a seguir, como ampliar o conceito de seno de um ângulo para qualquer arco trigonométrico.

> **Definição**: Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, chama-se **seno** de α a ordenada do ponto M.

$$\boxed{\text{sen}\ \alpha = \text{ordenada de M} = y_M}$$



A função seno

Definimos a função seno como:

$$\boxed{f: \Re \rightarrow \Re \text{ tal que } f(x) = \text{sen } x.}$$

Partindo do ponto A, vamos dar uma volta completa no ciclo. Dessa forma, observando as ordenadas dos pontos A, B, A' e B', podemos informar os valores da função seno para alguns arcos. Veja:

Medida x do arco em radianos	Extremidade do arco está no ponto:	Ordenada do ponto é:	O valor de sen x é:
0	A(1,0)	0	sen 0 = 0
$\pi/2$	B(0,1)	1	sen ($\pi/2$) = 1
π	A'(-1,0)	0	sen π = 0
$3\pi/2$	B'(0,-1)	-1	sen ($3\pi/2$) = -1
2π	A(1,0)	0	sen (2π) = 0

- O **domínio** da função f(x) = sen x é dom f = $\Re$.
- A **imagem** da função f(x) = sen x é Im f = [-1,1].
- A função é **periódica** com período 2π.

Variação de sinal do seno

O **seno** de um arco é a **ordenada** da extremidade desse arco. Como os pontos de ordenadas positivas são os do 1° e do 2° quadrante, e os pontos de ordenadas negativas são os do 3° e os do 4° quadrante, temos o seguinte quadro de sinais para o seno:

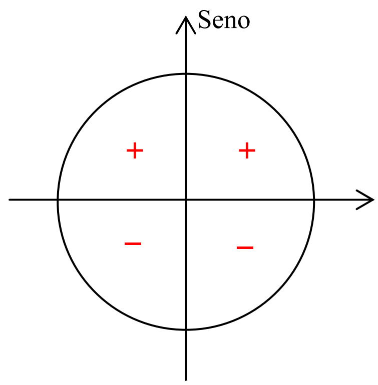
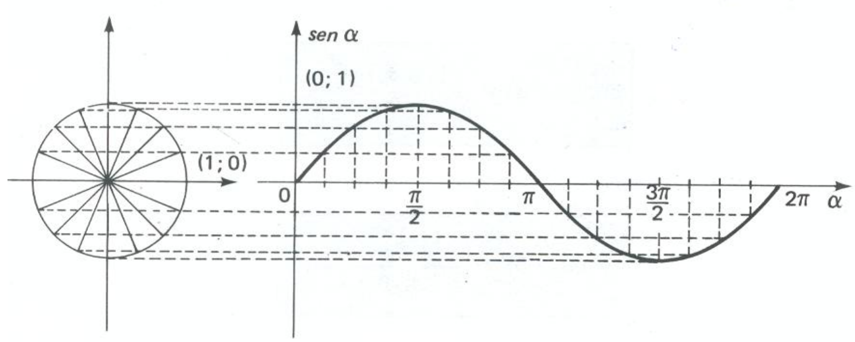


Gráfico da Função y = sen x

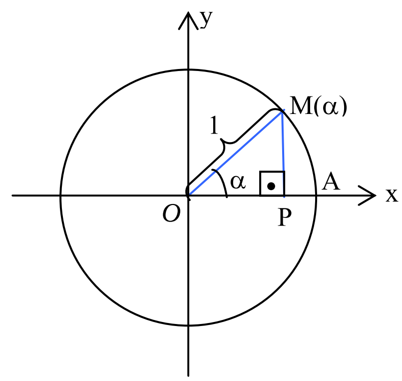


Resumindo, temos:

1) Função y = sen x ou f(x) = sen x. 2) O domínio é dom f = $\Re$. 3) A imagem é Im f = [-1,1]. 4) A função é periódica, de período 2π. 5) O sinal da função é: • Positivo no 1° e no 2° quadrante; • Negativo no 3° e no 4° quadrante.	6) A função é ímpar 7) A função - crescente no 1° e no 4° quadrante; - decrescente no 2° e no 3° quadrante.

Exemplo 5: Determinar o domínio, a imagem, o gráfico e o período das funções definidas por:

a) f(x) = 2 sen x   b) y = –3 + sen x



3.9 – Co-seno de um Arco Trigonométrico

Consideremos na circunferência trigonométrica um arco $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com 0° < α < 90°. No triângulo retângulo OMP, temos:

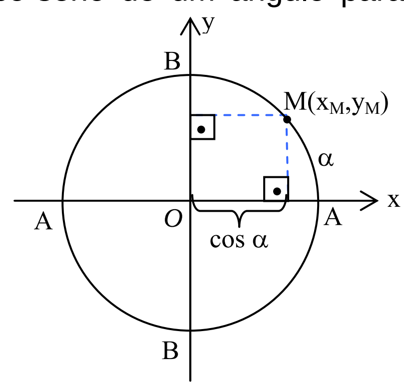
$$\cos \alpha = \frac{OP}{1} = OP$$

Note que a medida OP é a abscissa do ponto M.

Veremos a seguir, como ampliar o conceito de co-seno de um ângulo para qualquer arco trigonométrico.

Definição: Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, chama-se **co-seno** de α a abscissa do ponto M.

$$\boxed{\cos \alpha = \text{abscissa de } M = x_M}$$



A função co-seno

Definimos a função co-seno como:

$$\boxed{f: \Re \rightarrow \Re \text{ tal que } f(x) = \cos x.}$$

Partindo do ponto A, vamos dar uma volta completa no ciclo. Dessa forma, observando as abscissas dos pontos A, B, A' e B', podemos informar os valores da função co-seno para alguns arcos. Veja:

Medida x do arco em radianos	Extremidade do arco está no ponto:	Abscissa do ponto é:	O valor de cos x é:
0	A(1,0)	1	cos 0 = 1
$\pi/2$	B(0,1)	0	cos $(\pi/2) = 0$
π	A'(-1,0)	-1	cos $\pi = -1$
$3\pi/2$	B'(0,-1)	0	cos $(3\pi/2) = 0$
2π	A(1,0)	1	cos $(2\pi) = 1$

- O **domínio** da função f(x) = cos x é dom f = $\Re$.
- A **imagem** da função f(x) = cos x é Im f = [-1,1].
- A função é **periódica** com período 2π.

Variação de sinal do co-seno

O **co-seno** de um arco é a **abscissa** da extremidade desse arco. Como os pontos de abscissas positivas são os do 1° e os do 4° quadrante e os pontos de abscissas negativas são os do 2° e os do 3° quadrante, temos o seguinte quadro de sinais para o co-seno:

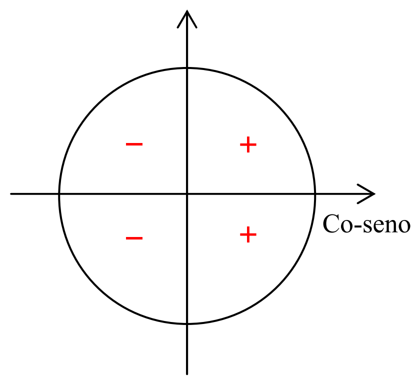
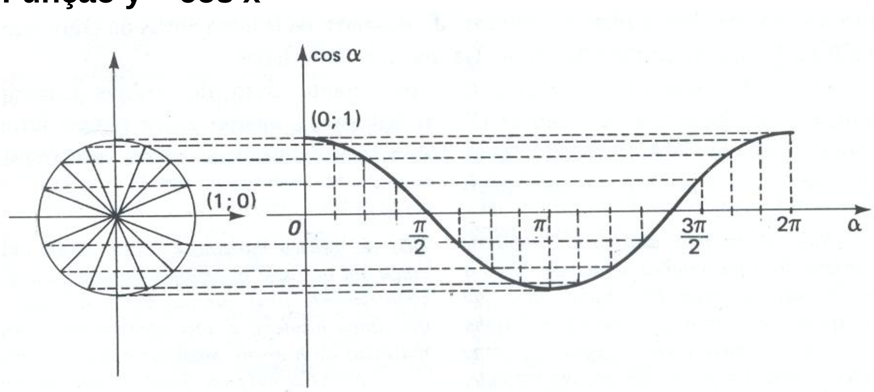


Gráfico da Função y = cos x



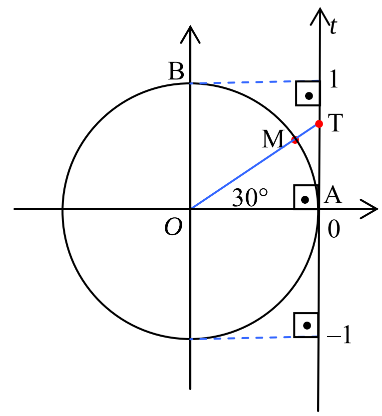
Resumindo, temos:

1) Função y = cos x ou f(x) = cos x. 2) O domínio é dom f = $\Re$. 3) A imagem é Im f = [-1,1]. 4) A função é periódica, de período 2π. 5) O sinal da função é: • Positivo no 1° e no 4° quadrante; • Negativo no 2° e no 3° quadrante.	6) A função é par 7) A função - crescente no 3° e no 4° quadrante; - decrescente no 1° e no 2° quadrante.

Exemplo 6: Determinar o domínio, a imagem, o gráfico e o período das funções definidas por:

a) $f(x) = 2 \cos x$ b) $y = -3 + \cos x$

3.10 – Tangente de um Arco Trigonométrico



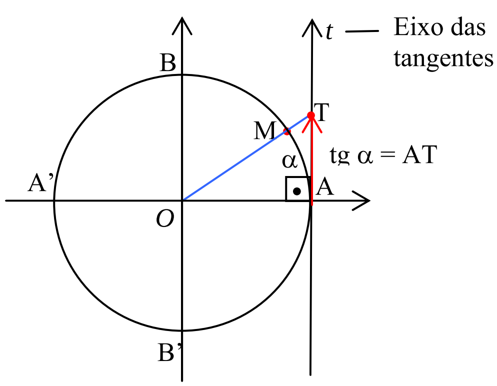
Podemos estender o conceito de tangente para ângulos não-agudos. Para isso consideremos um eixo real *t*, tangente à circunferência trigonométrica no ponto A(1,0), com origem A e com a mesma orientação do eixo *Oy.* Assim, dada a medida de um arco $\overset{\frown}{AM}$ no 1° quadrante (por exemplo, 30°), podemos representar a tangente desse arco no eixo *t*, prolongando o raio $\overline{OM}$ até a intersecção T com o eixo *t*.

No triangulo AOT, temos: $\text{tg } 30° = \dfrac{AT}{OA}$. Como OA = 1, concluímos que:

$$\text{tg } 30° = \frac{AT}{1} \Rightarrow \text{tg } 30° = AT.$$

Note, portanto, que a tangente de 30° é a medida de um segmento contido no eixo real t, que será chamado, de agora em diante, de **eixo das tangentes**. Estendendo essa idéia para arcos com extremidade fora do 1° quadrante, temos:

Definição: Dado um arco trigonométrico $\overset{\frown}{AM}$ de medida α, com M não-pertencente ao eixo das ordenadas, chama-se **tangente de** α (tg α) a ordenada do ponto T obtido pela intersecção do prolongamento do raio $\overline{OM}$ com o eixo das tangentes.



Observe que o ponto M não pode coincidir com B nem com B', pois os prolongamentos dos raios $\overline{OB}$ e $\overline{OB'}$ não interceptam o eixo das tangentes. Por isso dizemos que **não existe** tangente de um arco com extremidade em B ou B'.

A função tangente

Definimos a função tangente como:

$$\boxed{f: \Re_1 \rightarrow \Re \text{ tal que } f(x) = \text{tg } x.}$$

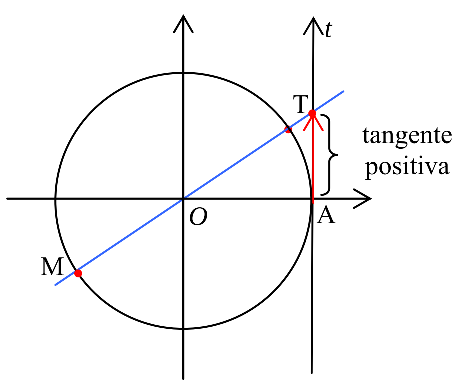
onde $R_1 = \{x \in \Re |\ x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi,\ k \in Z\}$. Partindo do ponto A, vamos dar uma volta completa no ciclo. Dessa forma, observando as abscissas dos pontos A, B, A' e B', podemos informar os valores da função tangente para alguns arcos. Veja:

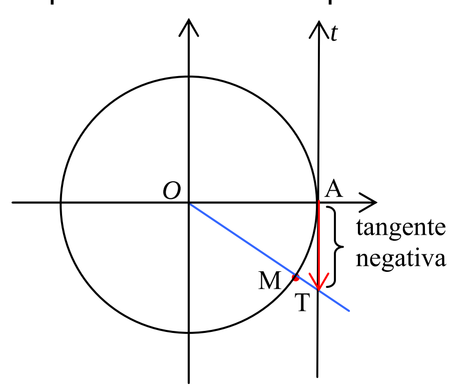
Medida x do arco em radianos	Extremidade do arco está no ponto:		O valor de tg x é:
0	A(1,0)	0	tg 0 = 0
$\pi/2$	B(0,1)	$\nexists$	tg $(\pi/2)$ $\nexists$
π	A'(-1,0)	0	tg π = 0
$3\pi/2$	B'(0,-1)	$\nexists$	tg $(3\pi/2)$ $\nexists$
2π	A(1,0)	0	tg (2π) = 0

- O **domínio** da função f(x) = tg x é dom $f = \Re_1 = \{x \in \Re |\ x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi,\ k \in Z\}$.
- A **imagem** da função f(x) = tg x é Im f = $\Re$.
- A função é **periódica** com período π.

Variação de Sinal da Tangente

Se um arco $\overset{\frown}{AM}$ tiver extremidade no 1° ou no 3° quadrante, o prolongamento do raio $\overline{OM}$ interceptará o eixo das tangentes em um ponto de ordenada positiva:





Se um arco $\overset{\frown}{AM}$ tiver extremidade no 2° ou no 4° quadrante, o prolongamento do raio $\overline{OM}$ interceptará o eixo das tangentes em um ponto de ordenada negativa, como no gráfico acima à direita.

Concluindo, a tangente é positiva pra arcos do 1° e do 3° quadrante e negativa para arcos do 2° e do 4° quadrante. Em resumo, essa variação de sinal é representada por:

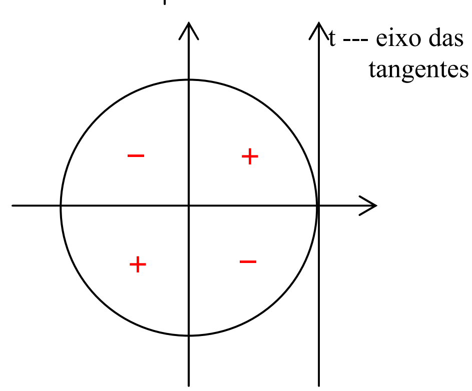
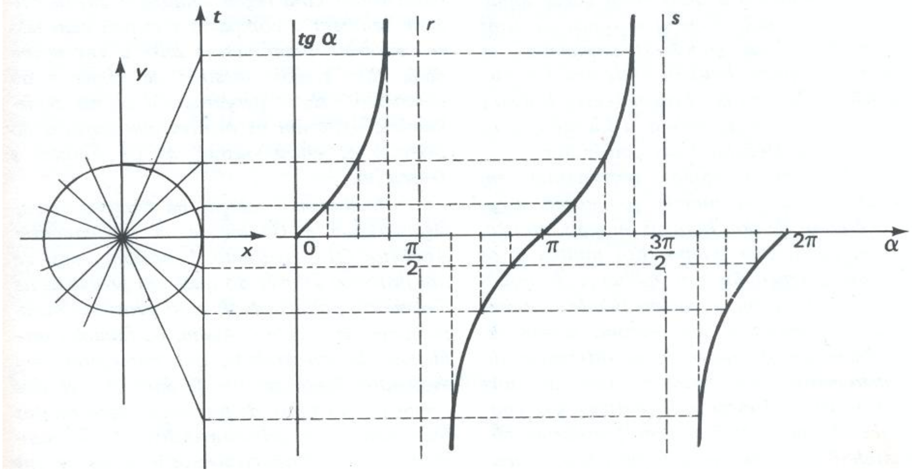


Gráfico da Função y = tg x



Resumindo, temos:

1) Função y = tg x ou f(x) = tg x. 2) O domínio é dom f = $\{x \in \Re \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi,\ k \in Z\}$. 3) A imagem é Im f = $\Re$. 4) A função é periódica, de período π. 5) O sinal da função é: • Positivo no 1° e no 3° quadrante; • Negativo no 2° e no 4° quadrante.	6) A função é ímpar. 7) A função é crescente em todos os quadrantes.

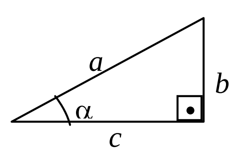
3.11 – As Razões Recíprocas do Seno, do Co-seno e da Tangente

Quando estudamos o triangulo retângulo, definimos as seguintes razões entre os lados:

$$\text{sen } \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{cateto\ oposto\ a\ \alpha}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = \frac{b}{c}$$



As recíprocas (inversas) dessas razões também são chamadas de razões trigonométricas e recebem nomes especiais: a recíproca do seno é chamada de co-secante (cossec), a do co-seno é chamada de secante (sec) e a da tangente é chamada de co-tangente (cotg), ou seja:

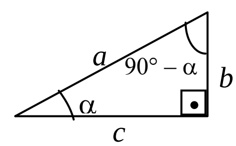
$$\text{cossec } \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ oposto\ a\ \alpha} = \frac{a}{b}$$

$$\text{sec } \alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = \frac{a}{c}$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{cateto\ oposto\ a\ \alpha} = \frac{c}{b}$$

O elemento de composição **co** nas palavras co-seno, co-secante e co-tangente significa "complemento", ou seja, o co-seno de α é o seno do complementar de α; a co-secante de α é a secante do complementar de α; e a co-tangente de α é a tangente do complementar de α. Lembrando que o complementar de α é $90° - \alpha$, observe essas afirmações com símbolos matemáticos:

$$\cos \alpha = \frac{c}{a} = \text{sen } (90° - \alpha)$$



$$\text{cossec } \alpha = \frac{a}{b} = \text{sec } (90° - \alpha)$$

$$\text{cotg } \alpha = \frac{c}{b} = \text{tg } (90° - \alpha)$$

Generalizando, dado um arco trigonométrico de medida α, podemos definir as razões recíprocas do seno, co-seno e tangente desse arco, desde que seja obedecida a condição de existência de cada razão, da seguinte maneira:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{cotg } \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}, \text{ para sen } \alpha \neq 0 \\ \text{sec } \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha}, \text{ para cos } \alpha \neq 0 \\ \text{cossec } \alpha = \dfrac{1}{\text{sen } \alpha}, \text{ para sen } \alpha \neq 0 \end{array}}$$

Observe, pela definição de cotg α, que, se além de sen $\alpha \neq 0$ tivermos também cos $\alpha \neq 0$, então:

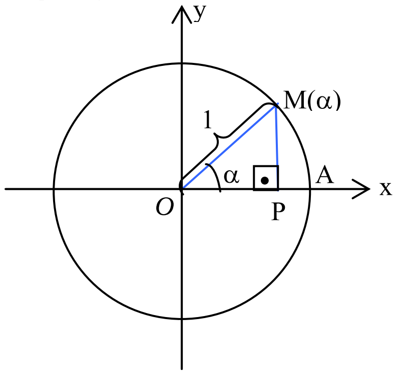
$$\boxed{\text{cotg } \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha}}$$

<u>Exemplo 6</u>: Calcular: a) cotg 30°; b) sec 180°; c) cossec 90°.

<u>Exemplo 7</u>: Resolver a equação: sec x = 2, para $0 \leq x < 2\pi$.

3.12 – Relações entre as Funções Trigonométricas

a) Seja α a medida de um arco com extremidade no 1° quadrante:



Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OMP, temos:

$$(PM)^2 + (OP)^2 = (OM)^2.$$

Mas sabemos que:

PM = sen α, OP = cos α e OM = 1(raio).

Logo, temos:

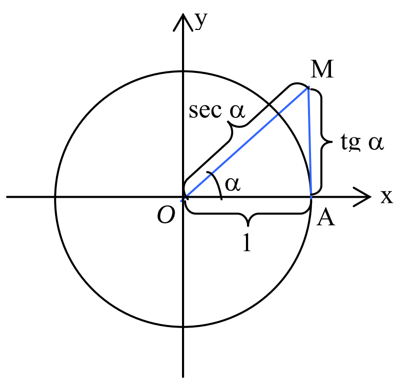
$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Observe que da relação fundamental, obtemos:

$\text{sen}^2\,\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ e $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\,\alpha$.

Assim, dado um arco trigonométrico de medida α, tem-se:

$$\boxed{\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1} \qquad \text{(a)}$$



b) Aplicando o teorema de Pitágoras no retângulo OAM, encontramos:

$$\text{(b)} \qquad \boxed{1 + \text{tg}^2\,\alpha = \sec^2\alpha}$$

Essa relação pode ser deduzida a partir da identidade:

$$\cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 1$$

Dividindo a equação por $\cos^2\alpha$, temos:

$$\frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + \frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \boxed{1 + \text{tg}^2\,\alpha = \sec^2\alpha}$$

c) Dividindo a equação (a) por $\text{sen}^2\,\alpha$, temos:

$$\frac{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \Rightarrow \frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\text{sen}^2\alpha} \Rightarrow \boxed{\text{cotg}^2\,\alpha + 1 = \text{cosec}^2\,\alpha} \quad \text{(c)}$$

<u>Exemplo 8</u>: Sendo sen $\alpha = \frac{3}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, calcular o valor do cos α.

<u>Exemplo 9</u>: Sendo sen α = 2 cos α e $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, determinar os valores de sen α e cos α.

<u>Exemplo 10</u>: Resolver a equação na variável x: $x^2 - 2x + \cos^2\alpha = 0$.

<u>Exemplo 11</u>: Resolver a equação sen x = $\frac{1}{2}$, para $0 \le x < 2\pi$.

3.13 – Fórmulas de Adição de Arcos

a) O seno do arco soma de *a* com *b* é:

$$\boxed{\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\,a\,.\,\cos b + \text{sen}\,b\,.\,\cos a}$$

b) Lembrando que sen ($a - b$) = sen [$a + (-b)$], cos ($-b$) = cos b, e sen ($-b$) = –sen b,

sen ($a - b$) = sen ($a + (-b)$)

= sen a . cos ($-b$) + sen ($-b$) . cos a

= sen a . cos b – sen b . cos a

Logo,

$$\boxed{\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}\,a\,.\,\cos b - \text{sen}\,b\,.\,\cos a}$$

d) Para co-seno de soma de arcos, tomaremos a fórmula de arcos complementares. Assim,

cos ($a + b$) = sen [$\frac{\pi}{2} - (a+b)$] = sen [($\frac{\pi}{2} - a) - b$]

= sen ($\frac{\pi}{2} - a$) . cos b – sen b . cos ($\frac{\pi}{2} - a$).

= cos a . cos b – sen b . sen a.

Logo,

$$\boxed{\cos\,(a+b) = \cos a\,.\,\cos b - \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b}$$

d) cos ($a - b$) = cos a . cos ($-b$) – sen a . sen ($-b$)

= cos a . cos b + sen a . sen b

$$\boxed{\cos\,(a-b) = \cos a\,.\,\cos b + \text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b}$$

e) Fórmula da tangente da soma de arcos:

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{sen(a+b)}{cos(a+b)}\text{, com } a+b \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi \text{ e } k \in \mathbb{Z}.$$

Dessa forma podemos escrever:

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{sena.\cos b + senb.\cos a}{\cos a.\cos b - sena.senb}$$

Dividindo o numerador e o denominador por cos a.cos b, temos:

$$\text{tg}\,(a+b) = \frac{\dfrac{sena.\cos b}{\cos a.\cos b} + \dfrac{senb.\cos a}{\cos a.\cos b}}{\dfrac{\cos a.\cos b}{\cos a.\cos b} - \dfrac{sena.senb}{\cos a.\cos b}} = \frac{\dfrac{sena}{\cos a} + \dfrac{senb}{\cos b}}{1 - \dfrac{sena}{\cos a}.\dfrac{senb}{\cos b}} = \frac{tga + tgb}{1 - tga.tgb}$$

Logo,

$$\boxed{\text{tg}\,(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga.tgb}}$$

f) De modo análogo determinamos que

$$\boxed{\operatorname{tg}(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga.tgb}}$$

3.14 – Fórmula do Arco Duplo

Um caso particular interessante e muito importante ocorre quando, nas fórmulas do seno, co-seno e tangente do arco (*a* + *b*), fazemos *b* = *a*. Observe:

a) sen (*a* + *a*) = sen *a . * cos *a* + sen *a.* cos *a*

Logo,

$$\boxed{\operatorname{sen}(2a) = 2.\ \operatorname{sen} a\ .\ \cos a}$$

b) cos (*a* + *a*) = cos*a . * cos*a* – sen *a . * sen *a*

Logo,

$$\boxed{\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a}$$

c) tg (*a* + *a*) = $\frac{tga + tga}{1 - tga.tga}$

$$\boxed{\operatorname{tg}(2a) = \frac{2tga}{1 - tg^2 a}}$$

3.15 – Transformação de Soma em Produto

Combinando de maneira conveniente as fórmulas de seno e co-seno de adição e subtração de arcos, obtemos algumas importantes relações que nos permitirão transformar alguns tipos de somas em produtos. Isso será muito usado ao resolvermos equações, futuramente.

Consideremos as fórmulas já estabelecidas anteriormente.

sen (*a* + *b*) = sen *a* . cos *b* + sen *b* . cos *a* (I)
sen (*a* – *b*) = sen *a* . cos *b* – sen *b* . cos *a* (II)
cos (*a* + *b*) = cos *a* . cos *b* – sen *a* . sen *b* (III)
cos (*a* – *b*) = cos *a* . cos *b* + sen *a* . sen *b* (IV)

Façamos inicialmente *a* + *b* = *p* e *a* – *b* = *q*. Desse modo, temos:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = p \\ a - b = q \end{array}\right\} \Rightarrow 2a = p + q \Rightarrow a = \frac{p+q}{2}$$

$$b = p - \frac{p+q}{2} \Rightarrow b = \frac{p-q}{2}$$

Somando (I) e (II), obtemos:

$$\text{sen}\,(a + b) + \text{sen}\,(a - b) = 2.\text{sen}\,a\,.\,\cos b$$

ou,

$$\boxed{\text{sen}\,p + \text{sen}\,q = 2.\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\,.\,\cos\,\frac{p-q}{2}}$$

Subtraindo (II) de (I), obtemos:

$$\text{sen}\,(a + b) - \text{sen}\,(a - b) = 2.\text{sen}\,b.\,\cos a$$

ou,

$$\boxed{\text{sen}\,p - \text{sen}\,q = 2.\text{sen}\,\frac{p-q}{2}\,.\,\cos\,\frac{p+q}{2}}$$

Somando (III) e (IV), obtemos:

$$\cos\,(a + b) + \cos\,(a - b) = 2.\cos a\,.\,\cos b$$

ou,

$$\boxed{\cos p + \cos q = 2.\cos\,\frac{p+q}{2}\,.\,\cos\,\frac{p-q}{2}}$$

Subtraindo (IV) de (III), obtemos:

$$\cos\,(a + b) - \cos\,(a - b) = -2.\text{sen}\,a\,.\,\text{sen}\,b$$

ou,

$$\boxed{\cos p - \cos q = -2.\text{sen}\,\frac{p+q}{2}\,.\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2}}$$

3.16 – Mais Identidades

As seguintes identidades trigonométricas são muito importantes para a resolução de algumas integrais:

$$\boxed{\text{sen}^2\,x = \frac{1-\cos 2x}{2}} \qquad \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}$$

Essas identidades podem ser facilmente obtidas da seguinte forma:

1) consideramos duas identidades já conhecidas:

$$\cos^2 x + \text{sen}^2\,x = 1$$

$$\cos^2 x - \text{sen}^2\,x = \cos 2x$$

2) Somando-as termo a termo, obtemos:

$$2\cos^2 x = 1 + \cos 2x \Rightarrow \boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}}$$

3) Subtraindo a segunda identidade da primeira, obtemos:

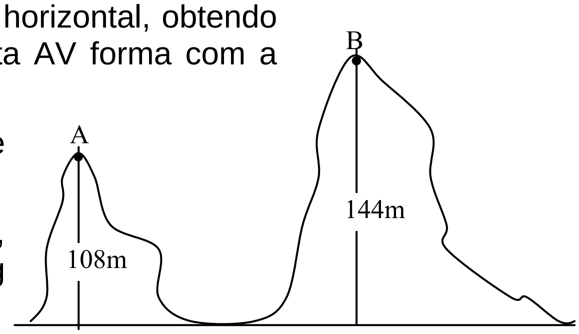
$$2\text{sen}^2 x = 1 - \cos 2x \Rightarrow \boxed{\text{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

Exercícios

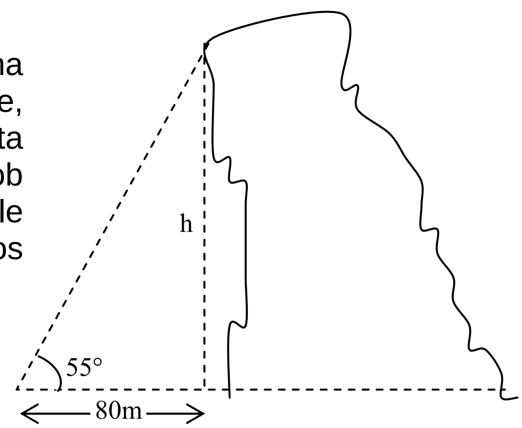
1) Um teleférico deve unir os topos A e B de dois morros. Para calcular a quantidade de cabos de aço necessária, um engenheiro mediu as alturas dos morros em relação a um mesmo plano horizontal, obtendo 108m e 144m. A seguir mediu o ângulo que a reta AV forma com a horizontal, obtendo 32°.

a) desenhe na figura ao lado um esquema que represente essa situação.

b) Calcule a distância entre os pontos A e B, sabendo que sen 32° = 0,52; cós 32° = 0,84 e tg 32° = 0,62.



2) Um alpinista deseja calcular a altura de uma encosta que ele vai escalar. Para isso, afasta-se, horizontalmente, 80m do pé da encosta (conforme figura a seguir) e visualiza o topo sob um ângulo de 55° com o plano horizontal. Calcule a altura da encosta. Dados: sen 55° = 0,81; cos 55° = 0,57; tg 55° = 1,42.



3) Qual é o máximo valor da função f(x) = 4 + 5 senx?

4) Qual é o mínimo valor da função g(x) = 6 + sen 4x?

5) Qual o conjunto-imagem da função f(x) = $\cos^2 x - \text{sen}^2 x + 3$?

6) Qual é o valor mínimo da função f(x) = 1 + 4 cosx?

7) Resolver a equação $\cos x = -\frac{1}{2}$, para $0 \le x < 2\pi$.

8) Resolver a equação: 2cos x . sen x – sen x = 0, para $0 \le x < 2\pi$.

9) Resolver a equação: $2\text{sen}^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$, para $0 \le x < 2\pi$.

10) Resolver a equação: $2\cos^2 x + \text{sen } x - 1 = 0$, para $0 \le x < 2\pi$.